Durée : 3 heures 30
Coefficient : 9

Le problème est composé de 5 questions, qui, bien que liées par le thème étudié et présentées dans une succession logique, peuvent être traitées dans un ordre arbitraire.

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont théoriques et font appel aux raisonnements habituels de l'Analyse. La question 5 est appliquée, et fait intervenir des techniques d'Informatique et de Calcul Scientifique.

Les candidats sont instamment invités à se référer aux commentaires précédant les questions, et dont l'objet principal a pour but de permettre que celles-ci puissent être abordées de manière indépendante.

- Résultats admis -

Les résultats de cours suivants sont rappelés aux candidats. Ils seront admis et pourront être utilisés sans qu'il soit nécessaire de les justifier ou de les redémontrer.

A) On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

B) Soit $H(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} \eta_k z^k$ la somme d'une série entière de la variable complexe $z \in \mathbb{C}$, définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \eta_k z^k$ soit convergente, et en particulier pour $|z|<R$ lorsque $R \neq 0$, où R désigne le rayon de convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \eta_k z^k$.

- Si $R \neq 0$, on admettra que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z|<R$,

  * La limite $H'(z)=\lim_{\substack{|h|\to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} h^{-1}(H(z+h)-H(z))$ existe et appartient à $\mathbb{C}$;

  * La série dérivée $\sum_{k=1}^{+\infty} k\eta_k z^{k-1}$ a un rayon de convergence égal à R ;

  * On a l'égalité $H'(z)=\sum_{k=1}^{+\infty} k\eta_k z^{k-1}$, (pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < R$).

- Soit $c > 0$ une constante. La relation $H(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x|<c$ équivaut à $\eta_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

C) Soit $w(x) = u(x) + iv(x) \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$, une fonction à valeurs complexes de la variable réelle x. Si $u(x) \in \mathbb{R}$ et $v(x) \in \mathbb{R}$ sont des fonctions continues de $x \in \mathbb{R}$, la fonction, définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$W(x)=\int_0^x w(t)dt=\int_0^x u(t)dt+i\int_0^x v(t)dt\ ,$$

est telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$W'(x)=\frac{d}{dx}W(x)=\lim_{\substack{|h|\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} h^{-1}(W(x+h)-W(x))=w(x),$$

et vérifie l'inégalité

$$|W(x)|=\left|\int_0^x w(t)dt\right|\le\int_0^x|w(t)|dt=\int_0^x(u^2(t)+v^2(t))^{1/2}dt.$$

De plus, si l'intégrale $\int_0^\infty |w(t)|dt$ est convergente, ou, de manière équivalente, si la limite $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x|w(t)|dt \in \mathbb{R}$ existe, il en est de même de la limite $\lim_{x\to+\infty} W(x) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x w(t)dt \in \mathbb{C}$.

- PROBLEME -

- Première question -

1) a) Montrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k!(2k+1)}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

On désigne sa somme par $\Sigma(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k!(2k+1)}$ (1.1)

En déduire que la limite

$$\Sigma'(z)=\lim_{\substack{|h|\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} h^{-1}(\Sigma(z+h)-\Sigma(z))$$

existe pour tout $z \in \mathbb{C}$, et montrer que sa somme est égale à une fonction simple de z que l'on précisera.

Pour quelles valeurs de $\theta \in]-\pi, +\pi]$, la fonction $\rho \to \Sigma'(\rho e^{i\theta})$ a-t-elle une limite lorsque $\rho \to +\infty$?

Montrer que la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial\rho}\Sigma(\rho e^{i\theta})$ de $\Sigma(\rho e^{i\theta})$ par rapport à $\rho \in \mathbb{R}$ existe et a une expression simple en fonction de $\Sigma'(\rho e^{i\theta})$

Caractériser l'ensemble Θ_f des valeurs de $\theta \in]-\pi, +\pi]$ pour lesquelles l'intégrale $\int_0^{+\infty} |\Sigma'(\rho e^{i\theta})| d\rho$ est convergente.

Lorsque $\theta \in \Theta_f$, que peut-on dire du comportement limite de $\Sigma(\rho e^{i\theta})$ lorsque $\rho \to +\infty$?

Dans la suite du problème, on posera, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Sigma(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k!(2k+1)} \qquad (1.2)$$

1) b) On note $\sqrt{i}$ le nombre complexe, solution particulière de l'équation $z^2 = i$, défini par

$$\sqrt{i}=e^{i\pi/4}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Etablir les identités, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{(i)} \quad \Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt;$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{\Phi(ix)}{i}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{t^2}dt; \qquad (1.3)$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{\Phi(x\sqrt{i})}{\sqrt{i}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \cos t^2\,dt-i\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \sin t^2 dt.$$

1) c) Discuter de l'existence dans $\mathbb{C}$ des limites suivantes, qu'on ne cherchera pas à calculer lorsqu'elles ont un sens (on ne considère ici que les cas d'existence de limites finies).

(a) $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \sin t^2\,dt$; (b) $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \cos t^2\,dt$;

(c) $\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)$; (d) $\lim_{x\to+\infty}\Phi(ix)$; (e) $\lim_{x\to+\infty}\Phi(x\sqrt{i})$.

- Deuxième Question -

Cette question peut être traitée indépendamment du reste du problème. On y adoptera la définition suivante de la fonction $\Phi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Le fait que cette définition (2.1) soit équivalente à la définition (1.2) adoptée dans la Première question sera admis.

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \qquad (2.1)$$

On introduit la fonction suivante de $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2}\,\Phi(x)=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt \qquad (2.2)$$

2) a) Montrer que la fonction réelle $Y(x) = \varphi(x)$, de la variable réelle x, satisfait une équation différentielle de la forme

$$Y'(x) - a(x)Y(x) = b(x) \qquad (2.3)$$

où $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions (éventuellement constantes) de x que l'on précisera.

Pour tout $C \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe une solution unique $Y_C(x)$, $x \in \mathbb{R}$, de l'équation (2.3) vérifiant $Y_C(0) = C$. Donner une expression simple de cette solution $Y_C(x)$ en fonction de x, C et $\Phi(x)$.

2) b) On demande de caractériser les solutions $Y(x)$ de l'équation différentielle (2.3) ci-dessus, qui s'expriment comme la somme d'une série entière de la forme

$$Y(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_k x^k \text{ pour } x \in \mathbb{R} \qquad (2.4)$$

Pour cela, on procédera comme suit.

En supposant que $Y(x)$ soit définie, comme en (2.4), par la somme, pour $|x|<R$, d'une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$, montrer que les coefficients $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$, de cette série sont liés par des relations de récurrence simples.

Déduire de ces relations la forme générale des coefficients $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$;

Evaluer le rayon de convergence R de la série $\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_k x^k$ ainsi obtenue, et conclure à l'existence de solutions de (2.3) ayant la forme voulue.

2) c) Montrer que la fonction $\varphi(x)$, telle qu'elle est définie en (2.2), est égale à la somme d'une série entière, convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$, et qu'on notera sous la forme

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k .$$

En distinguant le cas où $k = 2m$ de celui où $k = 2m + 1$, évaluer c_k en donnant, pour tout $m \in \mathbb{N}$, des expressions explicites de c_{2m} et c_{2m+1} s'exprimant en fonction de $m!$, $(2m + 1)!$ et de puissances de m que l'on précisera.

- Troisième question -

Dans cette question, on suppose que $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, est comme en (2.1).

3) a) Etablir les inégalités

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^r e^{-\rho^2}\, \rho d\rho \le \left(\int_0^r e^{-t^2} dt\right)^2 \le \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{r\sqrt{2}} e^{-\rho^2}\, \rho d\rho.$$

En déduire l'existence et la valeur de la limite

$$\lim_{x \to +\infty} \Phi(x).$$

3) b) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi_0(x)=e^{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt, \qquad (3.1)$$

et, pour tout entier $N \ge 1$ et $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$,

$$\psi_N(x)=e^{x^2}\int_x^{+\infty} t^{-N} e^{-t^2} dt. \qquad (3.2)$$

Montrer que, pour tout entier $N \ge 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^N \psi_N(x)\right)=0$$

3) c) Soit un entier $N \ge 0$. On suppose que, pour $x > 0$, $\psi_N(x)$ *et* $\psi_{N+2}(x)$ sont définies par (3.1)-(3.2).

Etablir une relation liant $\psi_N(x)$, $\psi_{N+2}(x)$ et $x^{-N-1} e^{-x^2}$ pour $x > 0$.

En déduire l'existence et la valeur de la limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{N-1}\,\psi_N(x)\right).$$

3) d) Etablir l'existence, pour tout entier $N \geq 0$, d'une identité de la forme

$$1-\Phi(x)=\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k\gamma_k}{x^{2k}}+2(-1)^{N+1}\gamma_{N+1}\,x\psi_{2N+2}(x)\right),\ \text{pour } x>0,$$

où $\{\gamma_k : k\geq 0\}$ désigne une suite de constantes ne dépendant pas de N.

Pour chaque valeur de $k \geq 0$, donner l'expression explicite de γ_k en fonction de (2k)!, k!, et d'une puissance de 2 que l'on précisera.

Etablir, pour tout $x > 0$ et $m \geq 0$ les inégalités

$$\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left(\sum_{k=0}^{2m+1}\frac{(-1)^k\gamma_k}{x^{2k}}\right)\leq 1-\Phi(x)\leq\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left(\sum_{k=0}^{2m}\frac{(-1)^k\gamma_k}{x^{2k}}\right)$$

3) e) Déterminer, pour $x \neq 0$, la nature de la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\gamma_k}{x^{2k}}.$$

- Quatrième Question -

Cette question peut être traitée indépendamment du reste du problème. Elle a pour objet l'étude de la fonction de $x \in \mathbb{R}$, définie par

$$L(x)=\frac{\Phi(ix)}{i}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{t^2}dt \qquad (4.1)$$

Le fait que la définition de $\Phi(ix)$ qui découle de la formule (4.1) ci-dessus soit équivalente à celle qui peut être obtenue en posant $z = ix$ dans la définition (1.2) donnée antérieurement sera admis.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}\,L(x)=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt.$$

4) a) Montrer que F est une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifier qu'une relation simple lie $F'(x)$ à $xF(x)$.

En déduire une relation de récurrence liant, pour tout $n \geq 0$, les dérivées d'ordre $n+2$, $n+1$ et n de F, notées respectivement $F^{(n+2)}$, $F^{(n+1)}$ et $F^{(n)}$.

4) b) Montrer que la limite $\lim_{x \to +\infty} xF(x)$ existe, et évaluer sa valeur.

En déduire que les fonctions $F(x)$ et $F'(x)$ sont bornées sur $\mathbb{R}$. On note

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x)| \text{ et } M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F'(x)|,$$

les bornes supérieures respectives de $|F(x)|$ et $|F'(x)|$ sur $\mathbb{R}$.

4) c) On fixe $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Montrer qu'il existe deux réels positifs A et B (pouvant dépendre de x) tels que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $n \geq 0$.

$$\left|F^{(2n)}(x)\right| + \left|F^{(2n+1)}(x)\right| \leq \prod_{k=0}^{n} (A + Bk).$$

4) d) Justifier l'identité

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{F^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

en montrant que la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{F^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et a pour somme $F(x)$.

- Cinquième question -

L'objet de cette question est d'établir des algorithmes programmés permettant d'évaluer certaines quantités numériques liées à la fonction Φ étudiée tout au long du problème. Le candidat, dans chaque cas, devra :

- Décrire et justifier la technique de calcul utilisée ;

- Etablir un programme, dans un langage proche du Pascal, permettant de réaliser le calcul demandé ;

- Réaliser le calcul avec les moyens disponibles de manière à fournir une valeur numérique répondant à la question posée.

Dans la notation finale, il sera tenu grand compte de :

- La rigueur des justifications théoriques fournies par le candidat, pour ce qui est, notamment, de la convergence des algorithmes utilisés, ainsi que de l'évaluation de la précision des résultats que ces algorithmes sont sensés fournir.

- L'efficacité des algorithmes proposés. En particulier, le candidat devra éviter des programmes conçus d'une façon telle que leur exécution implique des temps de calcul prohibitifs par rapport aux solutions les plus naturelles.

- La justesse des valeurs numériques, qui attesteront de l'aptitude du candidat à réaliser les calculs demandés.

- La présentation des programmes, qui doivent pouvoir être implémentables directement dans tout ordinateur acceptant le langage utilisé. Dans tous les cas, le candidat précisera la nature exacte de ce dernier ainsi que le type de la machine dont il s'est servi pour réaliser les applications numériques.

5) a) On désire évaluer numériquement l'intégrale

$$I = \int_0^{\infty} (\sin t^2 + \cos t^2)\,dt.$$

Ecrire un programme permettant d'évaluer I à 10^{-m} près, où $m \geq 1$ est un paramètre d'entrée. On supposera que la précision numérique des calculs effectués par l'ordinateur utilisé est d'ordre négligeable devant 10^{-m}.

Evaluer I à 10^{-2} près.

5) b) On considère la fonction

$$F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

On admettra que F possède un maximum $M_0 = \sup_{x \geq 0} F(x)$ unique sur l'intervalle $[0, +\infty[$, et que ce maximum est atteint en un point $x_0 \in [0,2]$.

Ecrire un programme permettant d'évaluer x_0 et M_0 à 10^{-m} près, où $m \geq 1$ est un paramètre d'entrée. On supposera que la précision numérique des calculs effectués par l'ordinateur utilisé est d'ordre négligeable devant 10^{-m}.

Evaluer x_0 et M_0 à 10^{-2} près.